Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №5 (2016), с. 635–656
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 635–656

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-635-656

УДК 517.929

Асимптотическое интегрирование одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием

Нестеров П. Н.

получена 5 мая 2016

Аннотация. В работе строятся асимптотические формулы для решений одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием при стремлении независимой переменной к бесконечности. Следует отметить две особенности, касающиеся рассматриваемого уравнения. Во-первых, коэффициент этого уравнения имеет колебательно убывающий вид. Во-вторых, при нулевом запаздывании это уравнение переходит в так называемое одномерное уравнение Шредингера с нулевой энергией и потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Динамика решений последнего хорошо известна. В этой связи интерес представляет вопрос о том, как изменяется характер поведения решений этого уравнения в качественном и количественном отношении при введении в эту динамическую модель запаздывания. Рассматриваемое уравнение интересно также и с позиции теории колебаний решений функционально-дифференциальных уравнений. Используемая в работе методика асимптотического интегрирования опирается на идеологию теории центральных многообразий в ее изложении применительно к системам функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Суть метода сводится к построению так называемого критического многообразия в фазовом пространстве динамической системы. Это многообразие является притягивающим и положительно инвариантным, а значит, динамика всех решений исходного уравнения определяется динамикой решений на критическом многообразии. Система, описывающая динамику решений на критическом многообразии, представляет собой линейную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении асимптотики решений этой системы используются усредняющие замены переменных и замены, позволяющие диагонализировать переменные матрицы. В результате подобных преобразований система на критическом многообразии приводится к так называемому L-диагональному виду. Асимптотика фундаментальной матрицы L-диагональной системы может быть построена с помощью классической теоремы Н. Левинсона.

Ключевые слова: асимптотика, уравнение с запаздыванием, уравнение Шредингера, осциллирующие коэффициенты, колеблемость решений, теорема Левинсона, метод усреднения

Для цитирования: Нестеров П. Н., "Асимптотическое интегрирование одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 635–656.

Об авторах:
Нестеров Павел Николаевич, orcid.org/0000-0002-9102-9436, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации №МК-4625.2016.1.

Постановка задачи

Исследованию поведения решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} - q(t)x = 0 \tag{1}$$

при $t \to +\infty$ посвящено значительное число работ. Во многих из них исследуется задача о колеблемости (или, наоборот, неколеблемости) решений уравнения (1) (см., в частности, [1, 5–7]). Вопросу построения асимптотики решений этого уравнения посвящены, в частности, работы [14, 15]. В работах [3, 8, 12] уравнение (1) рассматривается как одномерное уравнение Шредингера при нулевой энергии. Авторами строится асимптотика решений этого уравнения при $t \to +\infty$ в случае некоторых специальных потенциалов $q(t)$. К исследованным в этих работах случаям относится и случай так называемого потенциала типа Вигнера–фон Неймана:

$$q(t) = \frac{p(t)}{t^\rho}, \qquad \rho > 0. \tag{2}$$

Здесь $p(t)$ — действительный тригонометрический многочлен, имеющий нулевое среднее значение, т. е.

$$p(t) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad p_{-j} = \bar{p}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j, \tag{3}$$

причем

$$\mathrm{M}\big[p(t)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T p(t)dt = p_0 = 0. \tag{4}$$

Символом $\bar{a}$ обозначено число, комплексно сопряженное к a.

Колебательный характер функции $q(t)$ существенно усложняет исследование динамики уравнения (1) и для получения асимптотических формул авторами используются различные методы. Как оказывается, динамика решений уравнения (1) в случае функции $q(t)$ вида (2), (3) во многом определяется величиной

$$a = \mathrm{M}\Big[\Big(\int\limits_0^t p(s)ds\Big)^2\Big] - \Big(\mathrm{M}\Big[\int\limits_0^t p(s)ds\Big]\Big)^2 = \sum_{j=-N}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} \geq 0, \tag{5}$$

а также параметром ρ, характеризующим скорость убывания амплитуды колебаний функции $q(t)$ (см. таблицу 1 в разделе 3.).

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\ddot{x} - q(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0 \tag{6}$$

при условиях (2)–(4). Отметим, что в известных автору работах уравнения вида (6) рассматриваются, в основном, с позиций исследования вопроса о колеблемости решений. Отметим, в частности, монографии [10, 17, 18], в которых читатель может найти обзор литературы по этой тематике, а также работы [11, 20, 21], посвященные исследованию вопроса о колеблемости решений уравнений второго порядка с запаздыванием. Заметим также, что почти во всех работах, в которых изучается вопрос о колеблемости решений уравнений типа (6), функция $q(t)$ предполагается сохраняющей знак при $t \geq t_0$. Если функция $q(t)$ осциллирует, то известные методы оказываются не применимы. В работе будут построены асимптотические формулы, описывающие поведение решений уравнения (6) при $t \to \infty$. Нас будет интересовать вопрос о качественных и количественных различиях в динамике решений уравнения (6) и решений уравнения (1) с такой же функцией $q(t)$.

1. Описание метода асимптотического интегрирования

Запишем уравнение (6) в виде системы

$$\dot{y} = B_0 y_t + G(t, y_t), \qquad y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $y_t(\theta) = y(t+\theta)$ $(-h \leq \theta \leq 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^2\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^2$. Далее, B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^2$ и определяемый формулой

$$B_0\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi(0), \qquad \varphi(\theta) \in C_h. \tag{8}$$

Оператор $G(t, \varphi(\theta))$, действующий из C_h в $\mathbb{C}^2$, имеет вид

$$G(t, \varphi(\theta)) = q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi(-h). \tag{9}$$

Характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda \cdot} I) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{10}$$

построенное для линейной автономной системы

$$\dot{y} = B_0 y_t, \tag{11}$$

имеет ровно два корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Рассматривая эти корни как корни характеристического квазиполинома (число корней которого счетно), формально можно считать, что все остальные корни уравнения (10) подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \lambda < -\beta$, где $\beta > 0$ — произвольное действительное число. Данное обстоятельство позволяет для построения асимптотики решений системы (7) воспользоваться методом, предложенным в работе [19]. Опишем далее суть этого метода.

Известно, что линейная автономная система (11) для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t)\colon C_h \to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (11), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = y_t^{\varphi}(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $y_t^{\varphi}(\theta)$ — решение системы (11) с начальным условием $y_0^{\varphi}(\theta) = \varphi$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \left\{\varphi \in C_h \;\middle|\; \varphi'(\theta) \in C_h, \;\; \varphi'(0) = B_0\varphi\right\}$$

плотна в C_h. Введем представление Рисса для оператора B_0:

$$B_0\varphi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta),$$

где (2×2)-матричная функция $\eta(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на $[-h, 0]$. С системой (11) можно связать так называемую формально сопряженную систему

$$\dot{y}_* = -\int\limits_{-h}^{0} y_*(t-\theta)d\eta(\theta), \tag{12}$$

где $y_*(t)$ — комплекснозначная вектор-строка длины 2. Фазовым пространством для системы (12) является множество $C_h' \equiv C\big([0,h], \mathbb{C}^{2*}\big)$, где $\mathbb{C}^{2*}$ — пространство вектор-строк длины 2. Для любых $\psi \in C_h'$ и $\varphi \in C_h$ определим билинейную форму

$$\big(\psi(\xi), \varphi(\theta)\big) = \psi(0)\varphi(0) - \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \tag{13}$$

Пусть

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\},$$

тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \tag{14}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство, такое что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$. Для того чтобы охарактеризовать эти подпространства более точно, определим (2×2)-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены обобщенные собственные функции $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$ оператора A, отвечающие собственным числам из Λ. Таким образом, столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис подпространства P_Λ. Далее, пусть $\Psi(\xi)$ — (2×2)-матрица, по строкам которой расположены базисные функции $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ прямой суммы обобщенных собственных подпространств P_Λ^T оператора A^*, формально сопряженного к A относительно билинейной формы (13). Матрицы $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\xi)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\big(\Psi(\xi), \Phi(\theta)\big) = \left\{\big(\psi_i(\xi), \varphi_j(\theta)\big)\right\}_{1 \le i,j \le 2} = I. \tag{15}$$

Поскольку $\Phi(\theta)$ — базис P_Λ и $AP_\Lambda \subseteq P_\Lambda$, то существует такая (2×2)-матрица D, спектром которой является множество Λ, что $A\Phi(\theta) = \Phi(\theta)D$. Тогда, учитывая определение оператора A, имеем

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{D\theta}, \qquad T(t)\Phi(\theta) = \Phi(\theta)e^{Dt} = \Phi(0)e^{D(t+\theta)}, \tag{16}$$

где $-h \le \theta \le 0$ и $t \ge 0$. Аналогично для матрицы $\Psi(\xi)$ получаем

$$\Psi(\xi) = e^{-D\xi}\Psi(0), \tag{17}$$

где $0 \le \xi \le h$. Матрицы $\Phi(0)$ и $\Psi(0)$ выбираются из следующих соображений. Столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ являются обобщенными собственными векторами инфинитезимального производящего оператора A, а следовательно, они принадлежат $D(A)$. Значит,

$$\Phi'(0) = \Phi(0)D = B_0\Phi = \int_{-h}^{0} d\eta(\theta)\Phi(0)e^{D\theta}.$$

Аналогично, учитывая (12) и (17), выводим

$$\Psi'(0) = -D\Psi(0) = -\int_{-h}^{0} e^{D\theta}\Psi(0)d\eta(\theta).$$

Возвращаясь теперь к разложению (14), мы можем описать пространства P_Λ и Q_Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \{\varphi \in C_h \mid \varphi(\theta) = \Phi(\theta)a,\ a \in \mathbb{C}^2\}, \\ Q_\Lambda &= \{\varphi \in C_h \mid (\Psi, \varphi) = 0\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Несложные вычисления приводят нас к следующим формулам для матриц $\Phi(\theta)$, $\Psi(\xi)$ и D, построенных применительно к системе (11) в случае оператора (8):

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & -\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Определение 1. *Линейное двумерное пространство $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \ge t_* \ge t_0$ называется критическим многообразием для системы (7), если выполнены следующие условия:*

1. Существует (2×2)-матрица $H(t,\theta)$ непрерывная по $t \ge t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \ge t_*$ и $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t,\cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h\le\theta\le0} |H(t,\theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве (2×2)-матриц;

2. Пространство $\mathcal{W}(t)$ для $t \ge t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{\varphi(\theta) \in C_h \mid \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u,\ u \in \mathbb{C}^2\Big\}. \tag{20}$$

3. Пространство $\mathcal{W}(t)$ при $t \ge t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (7), т. е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \ge t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \ge T$.

Из результатов [19] следует, что при достаточно больших t в пространстве C_h для системы (7) существует критическое многообразие. Кроме того, данное множество является притягивающим множеством для всех траекторий системы (7). Скорость, с которой все траектории притягиваются к $\mathcal{W}(t)$, есть величина порядка $O(e^{-\beta t})$, где $\beta > 0$ — произвольное действительное число. Траектории, лежащие при всех достаточно больших t в $\mathcal{W}(t)$, описываются формулой

$$y_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + H(t,\theta)u(t), \qquad t \geq T, \quad u(t) \in \mathbb{C}^2. \tag{21}$$

Здесь функция $u(t)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \Big[D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\Big]u, \qquad t \geq T. \tag{22}$$

Эту систему называют проекцией системы (7) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или, короче, системой на критическом многообразии. Можно показать (см. [19]), что матрица $H(t,\theta)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big) + H(t,\theta)\left(D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 H + G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big), & \theta = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, если $u^{(1)}(t), u^{(2)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (22), а $y(t)$ — произвольное решение системы (7), определенное при $t \geq T$, то в силу (21) имеем

$$y(t) = y_t(0) = \big(\Phi(0) + H(t,0)\big)\big(c_1 u^{(1)}(t) + c_2 u^{(2)}(t)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty, \tag{24}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

В дальнейшем мы покажем, что система (22) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{u} = \Big[D + A_1(t)t^{-\rho} + A_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + A_k(t)t^{-k\rho} + R(t)\Big]u, \qquad u \in \mathbb{C}^2. \tag{25}$$

В этой системе матрица D определяется формулой (19), натуральное число k выбрано так, что $k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$, а $A_1(t), \ldots, A_k(t)$ — это матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е. матрицы вида

$$A_j(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_s^{(j)} e^{\mathrm{i}\nu_s t}, \tag{26}$$

где $\beta_s^{(j)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы, а ν_s — вещественные числа. Наконец, матрица $R(t)$ — это некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Построение асимптотики решений системы (25) при $t \to \infty$ усложняет то обстоятельство, что ее коэффициенты имеют колебательный вид. Поэтому на первом этапе построения асимптотических формул в системе (25) осуществляется так называемая усредняющая замена, которая позволяет избавиться от осциллирующих величин в главной части системы. Имеет место следующая теорема (см. [9]).

Теорема 1. *Система* (25) *при достаточно больших t заменой*

$$u = \Big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + Y_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + Y_k(t)t^{-k\rho}\Big]u_1 \tag{27}$$

приводится к виду

$$\dot{u}_1 = \Big[D + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho} + R_1(t))\Big]u_1(t) \tag{28}$$

с постоянными матрицами $A_1, \ldots, A_k$ и матрицей $R_1(t)$ из класса $L_1[t_*, \infty)$. В замене (27) *I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением.*

Как правило, для построения асимптотики решений системы (28) достаточно вычислить лишь несколько первых постоянных матриц. По этой причине приведем здесь для них явные формулы. Имеем

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big], \tag{29}$$

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \tag{30}$$

$$A_3 = \mathrm{M}\big[A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t)\big]. \tag{31}$$

Матрицы $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{Y}_1 - DY_1 + Y_1 D = A_1(t) - A_1, \tag{32}$$

$$\dot{Y}_2 - DY_2 + Y_2 D = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t) - Y_1(t)A_1 - A_2. \tag{33}$$

Дальнейшее преобразование усредненной системы (28) направлено на приведение ее с помощью некоторых специальных замен к виду

$$\dot{u}_2 = \big[A_0 + V(t)\big]t^{-\alpha}u_2 + R_2(t)u_2, \qquad \alpha > 0, \tag{34}$$

где A_0 — постоянная матрица, все собственные значения которой различны, $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\dot{V}(t), R_2(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Справедлива следующая лемма (см., например, [1, 4, 16]).

Лемма 1 (**о диагонализации переменной матрицы**). *Пусть все собственные числа матрицы A_0 различны, а матрица $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\dot{V}(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_0 + V(t)$ и $C(t) \to C_0$ при $t \to \infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы A_0;*

(ii) $\dot{C}(t) \in L_1[t_*, \infty)$*;*

(iii) *она приводит матрицу $A_0 + V(t)$ к диагональному виду, т. е.*

$$C^{-1}(t)\big[A_0 + V(t)\big]C(t) = \hat{\Lambda}(t),$$

где $\hat{\Lambda}(t) = \mathrm{diag}\big(\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t)\big)$ и $\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t)$ — собственные числа матрицы $A_0 + V(t)$.

В системе (34) осуществим замену

$$u_2(t) = C(t)u_3(t), \tag{35}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1. Эта замена приводит систему (34) к так называемому L-диагональному виду:

$$\dot{u}_3 = \big[\Lambda(t) + R_3(t)\big]u_3, \tag{36}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\big)$, $\lambda_j(t) = \hat{\lambda}_j(t)t^{-\alpha}$ $(j = 1, 2)$ и

$$R_3(t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t) + C^{-1}(t)R_2(t)C(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ матрица $R_3(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$.

Для построения асимптотики фундаментальной матрицы L-диагональной системы (36) при $t \to \infty$ может быть использована известная асимптотическая теорема Н. Левинсона. Предположим, что для элементов матрицы $\Lambda(t)$ выполнено следующее условие, называемое условием дихотомии: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{37}$$

либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{38}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Справедлива следующая теорема (см., например, [4, 16]).

Теорема 2 (**Levinson**). *Пусть выполнено условие дихотомии* (37), (38). *Тогда фундаментальная матрица L-диагональной системы* (36) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:*

$$U(t) = \big(I + o(1)\big)\exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}. \tag{39}$$

2. Построение асимптотических формул

С учетом формул (9), (19) уравнение (23) для нахождения матрицы $H(t,\theta)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, принимает следующий вид:

$$q(t)\begin{pmatrix}\theta & -\theta h\\ 1 & -h\end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix}\theta & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h) + H(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + q(t)H(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix} +$$
$$+ q(t)H(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, \quad -h \le \theta < 0,\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}H(t,0) + q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h), \quad \theta = 0.\end{cases} \tag{40}$$

Система на критическом многообразии (22) имеет вид

$$\dot{u} = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h)\right]u. \tag{41}$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ h_{11}(t,-h) & h_{12}(t,-h)\end{pmatrix}, \quad H(t,\theta) = \begin{pmatrix}h_{11}(t,\theta) & h_{12}(t,\theta)\\ h_{21}(t,\theta) & h_{22}(t,\theta)\end{pmatrix},$$

то нам необходимо определить из уравнения (40) лишь элементы $h_{11}(t,\theta)$ и $h_{12}(t,\theta)$ матрицы $H(t,\theta)$. Согласно [19], решение (40) может быть представлено в виде

$$H(t,\theta) = H_1(t,\theta)t^{-\rho} + H_2(t,\theta)t^{-2\rho} + \ldots + H_k(t,\theta)t^{-k\rho} + Z(t,\theta), \tag{42}$$

где натуральное k выбрано так, что $(k+1)\rho > 1$, $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$, а элементами матриц $H_i(t,\theta)$ являются тригонометрические многочлены переменной t, коэффициенты которых достаточно гладко зависят от $\theta \in [-h,0]$. Подставим (42) в уравнение (40) и учтем (2). Собирая члены при $t^{-\rho}$ и отбрасывая слагаемые, принадлежащие классу $L_1[t_*,\infty)$, получаем следующее уравнение для нахождения матрицы $H_1(t,\theta)$:

$$p(t)\begin{pmatrix}\theta & -\theta h\\ 1 & -h\end{pmatrix} + H_1(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{\partial H_1}{\partial t} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial \theta}, \quad -h \le \theta < 0,\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}H_1(t,0) + p(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix}, \quad \theta = 0.\end{cases} \tag{43}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$H_1(t,\theta) = \sum_{j=-N}^{N} \beta_j(\theta)e^{\mathrm{i}\omega_j t}. \tag{44}$$

Подставляя теперь (44) в (43) и собирая слагаемые при $e^{\mathrm{i}\omega_j t}$, с учетом (3) получаем следующие задачи для нахождения матриц $\beta_j(\theta)$, $j = -N, \ldots, N$:

$$p_j \begin{pmatrix} \theta & -\theta h \\ 1 & -h \end{pmatrix} + \beta_j(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\omega_j \beta_j(\theta) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{d\beta_j}{d\theta}, \quad -h \le \theta < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \beta_j(0) + p_j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix}, \quad \theta = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Пусть

$$\beta_j(\theta) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(\theta) & \beta_{12}(\theta) \\ \beta_{21}(\theta) & \beta_{22}(\theta) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где зависимость элементов матрицы $\beta_j(\theta)$ от индекса j для простоты записи временно упущена. Тогда задачу (45) можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \beta'_{11}(\theta) = p_j\theta + \mathrm{i}\omega_j \beta_{11}(\theta), \\ \beta'_{12}(\theta) = -p_j\theta h + \beta_{11}(\theta) + \mathrm{i}\omega_j \beta_{12}(\theta), \\ \beta'_{21}(\theta) = p_j + \mathrm{i}\omega_j \beta_{21}(\theta), \\ \beta'_{22}(\theta) = -p_j h + \beta_{21}(\theta) + \mathrm{i}\omega_j \beta_{22}(\theta) \end{cases} \tag{47}$$

с начальными условиями, которые определяются из системы

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega_j \beta_{11}(\theta) = \beta_{21}(0), \\ \beta_{11}(0) + \mathrm{i}\omega_j \beta_{12}(0) = \beta_{22}(0), \\ \mathrm{i}\omega_j \beta_{21}(0) = 0, \\ \beta_{21}(0) + \mathrm{i}\omega_j \beta_{22}(0) = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Из (48) выводим, что $\beta_{ij}(0) = 0$ для всех $i, j = 1, 2$. Решая затем систему (47) с нулевыми начальными условиями при $\theta = 0$, получаем, что

$$\beta_{11}^{(j)}(\theta) := \beta_{11}(\theta) = -\frac{p_j}{\omega_j^2} e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} - \frac{p_j}{\mathrm{i}\omega_j}\theta + \frac{p_j}{\omega_j^2}, \tag{49}$$

$$\beta_{12}^{(j)}(\theta) := \beta_{12}(\theta) = \Big(\frac{p_j h}{\omega_j^2} + \frac{2p_j}{\mathrm{i}\omega_j^3}\Big) e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} - \frac{p_j}{\omega_j^2}\theta e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} + \Big(\frac{p_j h}{\mathrm{i}\omega_j} - \frac{p_j}{\omega_j^2}\Big)\theta - \Big(\frac{p_j h}{\omega_j^2} + \frac{2p_j}{\mathrm{i}\omega_j^3}\Big). \tag{50}$$

Наконец, как следует из [19], для матрицы $Z(t, \theta)$ в (42) справедлива следующая оценка:

$$\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} = O\Big(\frac{d}{dt}(t^{-\rho})\Big) + O\big(t^{-(k+1)\rho}\big) = O\big(t^{-(\rho+1)}\big) + O\big(t^{-(k+1)\rho}\big), \quad t \to \infty. \tag{51}$$

Таким образом, учитывая (2), (42), (44), (46), (49), (50), (51), получаем следующее представление для системы на критическом многообразии (41):

$$\dot{u} = \big[D + A_1(t)t^{-\rho} + A_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + A_{k+1}(t)t^{-(k+1)\rho} + R(t)\big]u. \tag{52}$$

Здесь матрица D имеет вид (19), а матрицы $A_1(t)$, $A_2(t)$ задаются формулами:

$$A_1(t) = p(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = p(t) \sum_{j=-N}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{11}^{(j)}(-h) & \beta_{12}^{(j)}(-h) \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\omega_j t}. \tag{53}$$

Явный вид матриц $A_i(t)$, $i = 3, \ldots, k+1$, нам для дальнейших вычислений не потребуется. Отметим лишь, что элементами этих матриц являются тригонометрические многочлены

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

стоящие в позициях, отмеченных знаком $*$. Матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$ и допускает следующее представление при $t \to \infty$:

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) & O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) \end{pmatrix}. \tag{54}$$

В системе (52) осуществим усредняющую замену переменных

$$u = \big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + \ldots + Y_{k+1}(t)t^{-(k+1)\rho}\big]u_1.$$

Подставляя эту замену в (52) и удерживая слагаемое порядка $O\big(t^{-(\rho+1)}\big)$ (несмотря на то что оно принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$), на основании теоремы 1 приходим к системе

$$\dot{u}_1 = \big[D + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + A_3 t^{-3\rho} + \ldots + A_{k+1} t^{-(k+1)\rho} + \rho Y_1(t) t^{-(\rho+1)} + R_1(t)\big]u_1. \tag{55}$$

Здесь A_i, $i = 1, \ldots, k+1$, — некоторые постоянные действительные матрицы. Матрицы A_1, A_2 и A_3 определяются формулами (29)–(31), а матрица $Y_1(t)$, элементами которой являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, находится из уравнения (32) и имеет следующий вид:

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} \iint p(t)(dt)^2 & -2\iiint p(t)(dt)^3 - h\iint p(t)(dt)^2 \\ \int p(t)dt & -\iint p(t)(dt)^2 - h\int p(t)dt \end{pmatrix}.$$

Символом $\int$ обозначена первообразная, имеющая нулевое среднее значение. Матрица $R_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$ при $t \to \infty$ имеет порядок $O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big)$. В силу (4), (29) и (53) матрица A_1 является нулевой. При вычислении матрицы A_2 согласно (30) заметим, что

$$\mathrm{M}\big[A_1(t)Y_1(t)\big] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

где $a = \mathrm{M}\Big[\big(\int p(t)dt\big)^2\Big]$ есть в точности величина (5). Кроме того, здесь мы учли следующие формулы, которые проверяются простым интегрированием по частям:

$$\mathrm{M}\Big[p(t)\iint p(t)(dt)^2\Big] = -\,\mathrm{M}\Big[\Big(\int p(t)dt\Big)^2\Big], \quad \mathrm{M}\Big[p(t)\int p(t)dt\Big] = 0,$$
$$\mathrm{M}\Big[p(t)\iiint p(t)(dt)^3\Big] = -\,\mathrm{M}\Big[\int p(t)dt\iint p(t)(dt)^2\Big] = 0.$$

Поскольку в силу (3) и (49)

$$\mathrm{M}\Big[p(t)\sum_{j=-N}^{N}\beta_{11}^{(j)}(-h)e^{\mathrm{i}\omega_j t}\Big] = a - \sum_{j=-N}^{N}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^2}e^{\mathrm{i}\omega_j h},$$

то окончательно получаем следующую формулу для матрицы A_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a(h) & \nu(h) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

где

$$a(h) = \sum_{j=-N}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} e^{\mathrm{i}\omega_j h} = 2\sum_{j=1}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} \cos(\omega_j h), \quad a(0) = a, \tag{57}$$

и, с учетом (3), (50),

$$\nu(h) = \mathrm{M}\Big[p(t)\sum_{j=-N}^{N} \beta_{12}^{(j)}(-h)e^{\mathrm{i}\omega_j t}\Big] = 2\sum_{j=-N}^{N} |p_j|^2\Big(\frac{h}{\omega_j^2} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega_j^3}\Big)e^{\mathrm{i}\omega_j h} = \tag{58}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{4|p_j|^2}{\omega_j^2}\Big(h\cos(\omega_j h) - \frac{1}{\omega_j}\sin(\omega_j h)\Big) = 2ha(h) - 4\sum_{j=1}^{N}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^3}\sin(\omega_j h).$$

Матрица A_3, вычисляемая по формуле (31), имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(h) & \psi(h) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(h)$, $\psi(h)$ — некоторые действительные величины, не оказывающие влияния на структуру асимптотических формул в главном.

Чтобы улучшить оценку остаточного члена, осуществим в системе (55) усредняющую замену

$$u_1 = \big[I + V(t)t^{-(\rho+1)}\big]u_2,$$

где матрица $V(t)$, элементами которой являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, определяется как решение уравнения

$$\dot V - DV + VD = \rho Y_1(t).$$

Поскольку $\mathrm{M}\big[Y_1(t)\big] = 0$, то в результате этой замены мы получим систему

$$\dot u_2 = \big[D + A_2 t^{-2\rho} + A_3 t^{-3\rho} + \ldots + A_{k+1}t^{-(k+1)\rho} + R_2(t)\big]u_2, \tag{59}$$

где $R_2(t) = O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)$ при $t \to \infty$.

Продолжая упрощение системы на критическом многообразии, в системе (59) сделаем так называемое срезающее преобразование

$$u_2 = \begin{pmatrix} t^{\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix} u_3. \tag{60}$$

Приходим к системе

$$\dot u_3 = \big[B_0 t^{-1} + B_1 t^{-\rho} + B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t)\big]u_3, \tag{61}$$

где

$$B_0 = \frac{\rho}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(h) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(h) & \nu(h) \end{pmatrix} \tag{62}$$

и B_i $(i = 3, \dots k)$ — некоторые постоянные действительные матрицы. Матрица $R_3(t)$ из класса $L_1[t_*, \infty)$ имеет при $t \to \infty$ порядок $O(t^{-(k+1)\rho}) + O\big(t^{-(\rho+1)}\big) + O\big(t^{-2}\big)$. Система (61) может быть представлена в виде (34), а значит, для построения асимптотики ее решений при $t \to \infty$ можно воспользоваться леммой 1 совместно с теоремой Левинсона. Далее нам необходимо рассмотреть различные интервалы изменения параметра ρ.

Пусть сначала

$$\rho > 1. \tag{63}$$

В этом случае функции $t^{-j\rho}$, $j = 1, \dots, k$, принадлежат классу $L_1[t_*, \infty]$. Поскольку матрица B_0 является диагональной, то система (61) имеет L-диагональную форму (36). Следовательно, ее фундаментальная матрица в силу теоремы 2 имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[I + o(1)\big] \begin{pmatrix} t^{-\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & t^{\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix}.$$

С учетом преобразования (60) получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (59):

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) & o(t^{\rho}) \\ o(1) & 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad t \to \infty. \tag{64}$$

К сожалению, данное представление не позволяет получить главную часть асимптотики для первой компоненты второго базисного решения системы (59). Это можно сделать следующим образом. Пусть

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ u_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix},$$

тогда из (59) с учетом (63) следует, что

$$\dot{u}_{12} = u_{22}(t) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{12}(t) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{22}(t) = O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{12}(t) + 1 + o(1).$$

Интегрируя этого уравнение и учитывая, что $O\big(t^{-(\rho+2)}\big) \in L_1[t_*, \infty)$, получаем

$$u_{12}(t) = \exp\Big\{\int_{t_*}^{t} O\big(s^{-(\rho+2)}\big)ds\Big\}u_{12}(t_*) + \int_{t_*}^{t} \exp\Big\{\int_{s}^{t} O\big(\tau^{-(\rho+2)}\big)d\tau\Big\}\big(1 + o(1)\big)ds =$$
$$= \big(1 + o(1)\big)t, \quad t \to \infty.$$

Таким образом, фундаментальные решения системы (59), а значит, и системы (41) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \big(1 + o(1)\big)t \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}.$$

Замечая теперь, что в силу (19), (42) и (51)

$$\Phi(0) + H(t, 0) = I + o(1), \qquad t \to \infty, \tag{65}$$

из (24) с учетом (7) выводим, что все решения уравнения (6) в случае (63) допускают следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)t + c_2\big(1 + o(1)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Пусть теперь

$$\rho = 1.$$

В этой ситуации система (61) может быть записана в виде

$$\dot{u}_3 = \big[A_0 t^{-1} + R_4(t)\big]u_3, \tag{66}$$

где

$$A_0 = B_0 + B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -a(h) & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

и $R_4(t) = B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t) = O\big(t^{-2}\big) \in L_1[t_*, \infty)$. Вид собственных чисел матрицы A_0, а следовательно, и асимптотика решений системы (66), будут различаться в зависимости от знака величины $a(h) - \frac{1}{4}$.

- $a(h) > \frac{1}{4}$.

Собственные числа матрицы A_0 определяются формулой

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}.$$

Поскольку собственные числа матрицы A_0 различны, то заменой $u_3 = Cu_4$, где матрица C приводит матрицу A_0 к диагональной форме, систему (66) можно привести к L-диагональному виду (36) с матрицей $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)t^{-1}$. Применяя затем теорему Левинсона, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (61) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}} \end{pmatrix} + o(1)\right] \begin{pmatrix} \exp\{\lambda_1 \ln t\} & 0 \\ 0 & \exp\{\lambda_2 \ln t\} \end{pmatrix}.$$

Проделывая теперь замены в обратном порядке, в силу (7), (24) и (65) получаем следующую асимптотическую формулу для решений уравнения (6) при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\Big\{\mathrm{i}\ln t\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}\Big\} + c_2\big(1 + o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\mathrm{i}\ln t\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

- $a(h) < \frac{1}{4}$.

Собственные числа матрицы A_0 действительны и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - a(h)}.$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, получаем асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (61) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a(h)} & \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Поведение решений уравнения (6) при $t \to \infty$ описывается следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)t^{1/2+\sqrt{1/4-a(h)}} + c_2\big(1 + o(1)\big)t^{1/2-\sqrt{1/4-a(h)}} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\frac{1}{2} < \rho < 1. \tag{67}$$

Систему (61) запишем в виде

$$\dot{u}_3 = \big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}u_3 + R_4(t)u_3, \tag{68}$$

где $V(t) = B_0t^{\rho-1}$ и $R_4(t) = B_2t^{-2\rho} + \ldots + B_kt^{-k\rho} + R_3(t) = O\big(t^{-2\rho}\big) \in L_1[t_*, \infty)$. Заметим, что система (68) имеет вид (34), а значит, асимптотика ее решений строится с помощью леммы 1 и теоремы 2. Вид асимптотических формул будет различаться в зависимости от знака величины $a(h)$.

- $a(h) > 0$.

Собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h)}t^{-\rho} + O\big(t^{\rho-2}\big), \quad t \to \infty.$$

Поскольку величина $O\big(t^{\rho-2}\big)$ при условии (67) принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$, то для фундаментальной матрицы системы (68) получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{a(h)} & -\mathrm{i}\sqrt{a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times \\ \times \begin{pmatrix} \exp\big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} & 0 \\ 0 & \exp\big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} \end{pmatrix}.$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущих случаях, строим асимптотику для решений исходного уравнения (6) при $t \to \infty$. Приходим к следующей формуле:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\Big\{\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

- $a(h) < 0$.

Собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ определяются формулой

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm\sqrt{-a(h)}t^{-\rho} + O\big(t^{\rho-2}\big), \quad t \to \infty.$$

Для фундаментальной матрицы системы (68) получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-a(h)} & -\sqrt{-a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} & 0 \\ 0 & \exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} \end{pmatrix}.$$

Решения уравнения (6) описываются при $t \to \infty$ следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\}+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{-\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\}+O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Наконец, рассмотрим случай, когда

$$\rho \le \frac{1}{2}. \tag{69}$$

Систему (61) представим в виде

$$\dot{u}_3 = \big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}u_3 + R_3(t)u_3, \tag{70}$$

где $V(t) = B_2t^{-\rho} + \ldots + B_kt^{-(k-1)\rho} + B_0t^{\rho-1}$. Как и в предыдущем случае, асимптотика решений этой системы будет различаться в зависимости от знака величины $a(h)$.

- $a(h) > 0$.

Учитывая формулы (62), определяющие матрицы B_1 и B_2, заключаем, что собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ при достаточно больших t являются комплексно сопряженными и имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(t) = \Big(\frac{\nu(h)}{2} + O\big(t^{-\rho}\big)\Big)t^{-2\rho} \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h)}t^{-\rho}\Big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\Big), \quad t \to \infty. \tag{71}$$

Здесь величина $\nu(h)$ задается формулой (58). Заметим, что слагаемое порядка $O\big(t^{-3\rho}\big)$ в формуле (71) принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$, если $\rho > \frac{1}{3}$. Используя лемму 1 и теорему Левинсона, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (70) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{a(h)} & -\mathrm{i}\sqrt{a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$
$$\times\begin{pmatrix} \exp\big\{f(t)+\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} & 0 \\ 0 & \exp\big\{f(t)-\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} \end{pmatrix},$$

где

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\nu(h)}{2}\ln t, & \rho=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\nu(h)}{2(1-2\rho)}t^{1-2\rho}, & \dfrac{1}{3}<\rho<\dfrac{1}{2},\\ \Bigl(\dfrac{\nu(h)}{2}+o(1)\Bigr)\dfrac{t^{1-2\rho}}{(1-2\rho)}, & \rho\le\dfrac{1}{3}.\end{cases}\tag{72}$$

Решения уравнения (6) при $t\to\infty$ описываются тогда следующей асимптотической формулой:

$$x(t)=c_1\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{f(t)+\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+\\+c_2\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{f(t)-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+O\bigl(e^{-\beta t}\bigr),\tag{73}$$

где c_1,c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta>0$ — произвольное действительное число. В частности, в случае $\rho=\frac{1}{2}$ с учетом (72) асимптотическое представление (73) выглядит следующим образом:

$$x(t)=c_1\bigl(1+o(1)\bigr)t^{1/4+\nu(h)/2}\exp\Bigl\{\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+\\+c_2\bigl(1+o(1)\bigr)t^{1/4+\nu(h)/2}\exp\Bigl\{-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+O\bigl(e^{-\beta t}\bigr).$$

- $a(h)<0$.

Собственные числа матрица $\bigl[B_1+V(t)\bigr]t^{-\rho}$ при достаточно больших t являются действительными:

$$\lambda_{1,2}(t)=\pm\sqrt{-a(h)}t^{-\rho}\bigl(1+O\bigl(t^{-\rho}\bigr)\bigr),\quad t\to\infty.$$

Фундаментальная матрица системы (70) при $t\to\infty$ имеет следующую асимптотику:

$$U_3(t)=\left[\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{-a(h)}} & -\dfrac{1}{\sqrt{-a(h)}}\end{pmatrix}+o(1)\right]\times\\ \times\begin{pmatrix}\exp\bigl\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\bigr\} & 0\\ 0 & \exp\bigl\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\bigr\}\end{pmatrix}.$$

Решения уравнения (6) описываются при $t\to\infty$ следующей асимптотической формулой:

$$x(t)=c_1\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+\\+c_2\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{-\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+O\bigl(e^{-\beta t}\bigr),$$

где c_1,c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta>0$ — произвольное действительное число.

3. Сравнение асимптотик решений для уравнений (1) и (6)

В этом разделе мы сравним поведение решений уравнений (1) и (6) с функцией $q(t)$ вида (2) при $t \to +\infty$. Асимптотические формулы для базисных решений уравнения (1) при различных значениях параметра ρ приведены в таблице 1.

Таблица 1. Асимптотические формулы для фундаментальных решений уравнения (1), (2) при $t \to +\infty$ $(a \neq 0)$
Table 1. Asymptotic formulas for fundamental solutions of Eqs. (1), (2) as $t \to +\infty$ $(a \neq 0)$

$\rho > 1$		$x_1(t) = t\big(1+o(1)\big),\ x_2(t) = 1+o(1)$
$\rho = 1$	$a > \frac{1}{4}$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{1}{2}} \exp\big\{\pm \mathrm{i}\sqrt{a-1/4}\ln t\big\}\big(1+o(1)\big)$
$\rho = 1$	$a < \frac{1}{4}$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{1/4-a}}\big(1+o(1)\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$		$x_{1,2}(t) = t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\pm \mathrm{i}\sqrt{a}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\}\big(1+o(1)\big)$
$\rho \leq \frac{1}{2}$		$x_{1,2}(t) = t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\pm \mathrm{i}\sqrt{a}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\}\big(1+o(1)\big)$

Таблица 2. Асимптотические формулы для решений уравнения (6) при $t \to +\infty$
Table 2. Asymptotic formulas for solutions of Eq. (6) as $t \to +\infty$

$\rho > 1$		$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t + c_2\big(1+o(1)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho = 1$	$a(h) > \frac{1}{4}$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)-1/4}\ln t\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)-1/4}\ln t\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho = 1$	$a(h) < \frac{1}{4}$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{1/2+\sqrt{1/4-a(h)}} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{1/2-\sqrt{1/4-a(h)}} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$	$a(h) > 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$	$a(h) < 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho \leq \frac{1}{2}$	$a(h) > 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{f(t) + \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho} \times$ $\times\big(1+o(1)\big)\big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{f(t) - \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}\times$ $\times t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho \leq \frac{1}{2}$	$a(h) < 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho} \times$ $\times\big(1+o(1)\big)\big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\times$ $\times\big(1+o(1)\big)\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$

В таблице 2 собраны построенные нами в предыдущем разделе асимптотические формулы для решений уравнения (6). В этой таблице c_1, c_2 — произвольные действительные (или комплексные) постоянные, $\beta > 0$ — произвольное действительное число, величина $a(h)$ определяется формулой (57), а функция $f(t)$ задается выражением (72)

Сравним далее поведение решений уравнений (1) и (6) при $t \to \infty$, анализируя приведенные в таблицах 1 и 2 асимптотические выражения.

1. $\rho > 1$.

Главные части асимптотических формул в этом случае совпадают, т. е. запаздывание не влияет существенным образом на динамику решений.

2. $\rho = 1$.

В отличие от уравнения (1) характер поведения решений уравнения (6) определяется величиной $a(h)$. Изменение величины запаздывания в данном случае может приводить как к количественным, так и к качественным изменениям в динамике решений. Отметим также следующее обстоятельство. Из формулы (57) следует, что $|a(h)| \le a$ для всех $h \ge 0$. Следовательно, если решения уравнения (1) осциллировали ($a > \frac{1}{4}$), то при изменении запаздывания в уравнении (6) решения могут стать неосциллирующими при тех h, для которых $a(h) < \frac{1}{4}$. Если же решения уравнения (1) не осциллировали ($a < \frac{1}{4}$), то при изменении запаздывания в уравнении (6) решения остаются неосциллирующими, т. к. в этой ситуации $a(h) < \frac{1}{4}$ для всех $h \ge 0$. Наконец, отметим, что, как у уравнения (1), так и у уравнения (6) при $\rho = 1$ всегда существуют неограниченные решения.

3. $\frac{1}{2} < \rho < 1$.

Существенное отличие динамики решений уравнения (6) от динамики решений уравнения (1) состоит в следующем. Величина $a(h)$, определяющая динамику решений уравнения (6), в отличие от величины a, определяющей динамику решений уравнения (1), может принимать отрицательные значения. В частности, если решения уравнения (1) при $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ всегда осциллируют, то в уравнении (6) при изменении параметра h решения могут стать неосциллирующими, если $a(h) < 0$. Отметим также, что, как уравнение (1), так и уравнение (6) при $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ всегда имеют неограниченные решения.

4. $\rho \le \frac{1}{2}$.

Сперва отметим, что, как и в предыдущем случае, решения уравнения (6) в отличие от решений уравнения (1) могут быть неосциллирующими при тех значениях h, при которых $a(h) < 0$. Существенная разница в динамике решений уравнения (1) и решений уравнения (6) может наблюдаться и при тех h, при которых $a(h) > 0$. Вспоминая представление (72) для функции $f(t)$, а также формулу (58) для величины $\nu(h)$, заключаем, что на поведение решений уравнения (6) при $t \to \infty$ будет влиять знак величины $\frac{1}{4} + \frac{\nu(h)}{2}$, если $\rho = \frac{1}{2}$, или знак величины $\nu(h)$, если $\rho < \frac{1}{2}$. Так, все ненулевые решения уравнения (1) при $\rho < \frac{1}{2}$ неограниченно возрастают, а все решения уравнения (6) стремятся к нулю при $t \to \infty$, если $\rho < \frac{1}{2}$, и запаздывание h выбрано так, что $a(h) > 0$ и $\nu(h) < 0$. В частности, заметим, что величина $\nu(h)$ отрицательна при всех достаточно малых $h > 0$, поскольку

$$\nu(h) = -\frac{4h^3}{3}\big(1 + O(h^2)\big) \sum_{j=1}^{N} |p_j|^2, \quad h \to 0.$$

Заметим, что отмеченные различия в динамике решений уравнений (1) и (6) во многом схожи с соответствующими различиями в динамике решений уравнения (1) и его разностного аналога

$$x(n+2) - 2x(n+1) + \Big(1 - \frac{p(n)}{n^\rho}\Big)x(n) = 0, \quad n \geq n_0,$$

изученного в работе [13].

В завершение отметим, что совершенно аналогично тому, как это было сделано в настоящей работе, могут быть построены асимптотические формулы для решений уравнения

$$\ddot{x} - \xi(t)p(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0,$$

где функция $p(t)$ определяется формулами (3), (4), а действительная функция $\xi(t)$ такова, что $\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\xi'(t) \in L_1[t_0, \infty)$ и существует такое целое неотрицательное K, что $\xi^K(t) \notin L_1[t_0, \infty)$, но $\xi^{K+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Список литературы / References

[1] Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954; пер. с англ.: Bellman R., *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Бурд В. Ш., Каракулин В. А., “Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами”, *Матем. заметки*, **64**:5 (1998), 658–666; англ. пер.: Burd V. Sh., Karakulin V. A., “On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients”, *Math. Notes*, **64**:5 (1998), 571–578.

[3] Итс А. Р., “Асимптотическое поведение решений радиального уравнения Шредингера с осциллирующим потенциалом при нулевой энергии”, *Проблемы математической физики. Сб. статей*, **9**, Изд-во Ленинградского ун-та, Ленинград, 1979, 30–41; англ. пер.: Its A. R., “The asymptotic behavior of solutions to the radial Schrödinger equation with oscillating potential at energy zero”, *Selecta Math. Soviet*, **3** (1984), 291–300.

[4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[5] Кондратьев В. А., “Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка”, *УМН*, **12**:3(75) (1957), 159–160; [Kondrat’ev V. A., “Jelementarnyj vyvod neobhodimogo i dostatochnogo uslovija nekoleblemosti reshenij linejnogo differencialnogo uravnenija vtorogo porjadka”, *UMN*, **12**:3(75) (1957), 159–160, (in Russian).]

[6] Левин А. Ю., “Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$”, *УМН*, **20**:2(122) (1965), 244–246; [Levin A. Yu., “Integralnyj kriterij neoscilljacionnosti dlja uravnenija $\ddot{x} + q(t)x = 0$”, *UMN*, **20**:2(122) (1965), 244–246, (in Russian).]

[7] Левин А. Ю., “Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае”, *Матем. сб.*, **75(117)**:1 (1968), 39–63; англ. пер.: Levin A. J., “Behavior of the solutions of the equation $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ in the nonoscillatory case”, *Mathematics of the USSR — Sbornik*, **4**:1 (1968), 33–55.

[8] Нестеров П. Н., “Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 240–250; англ. пер.: Nesterov P. N., “Construction of the asymptotics of the solutions of the one-dimensional Schrödinger equation with rapidly oscillating potential”, *Math. Notes*, **80**:2 (2006), 233–243.

[9] Нестеров П. Н., “Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **43**:6 (2007), 731–742; англ. пер.: Nesterov P. N., “Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients”, *Differ. Equ.*, **43**:6 (2007), 745–756.

[10] Agarwal R. P., Bohner M., Li W.-T., *Nonoscillation and oscillation: theory for functional differential equations*, Dekker, New York, 2004.

[11] Berezansky L., Braverman E., “Some oscillation problems for a second order linear delay differential equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **220**:2 (1998), 719–740.

[12] Bodine S., Lutz D. A., “Asymptotic analysis of solutions of a radial Schrödinger equation with oscillating potential”, *Math. Nachr.*, **279**:15 (2006), 1641–1663.

[13] Burd V., Nesterov P., “Asymptotic behaviour of solutions of the difference Schroödinger equation”, *J. Difference Equ. Appl.*, **17**:11 (2011), 1555–1579.

[14] Cassell J. S., “The asymptotic behaviour of a class of linear oscillators”, *Quart. J. Math.*, **32**:3 (1981), 287–302.

[15] Cassell J. S., “The asymptotic integration of some oscillatory differential equations”, *Quart. J. Math.*, **33**:2 (1982), 281–296.

[16] Eastham M. S. P., *The asymptotic solution of linear differential systems*, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[17] Erbe L. H., Kong Q., Zhang B. G., *Oscillation theory for functional differential equations*, Dekker, New York, 1995.

[18] Ladde G. S., Lakshmikantham V., Zhang B. G., *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments*, Dekker, New York-Basel, 1987.

[19] Nesterov P., “Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients: a center manifold approach”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, № 33, 1–43.

[20] Opluštil Z., Šremr J., “Some oscillation criteria for the second-order linear delay differential equation”, *Math. Bohem.*, **136**:2 (2011), 195–204.

[21] Opluštil Z., Šremr J., “Myshkis type oscillation criteria for second-order linear delay differential equations”, *Monatsh. Math.*, **178**:1 (2015), 143–161.

Nesterov P. N., "Asymptotic Integration of a Certain Second-Order Linear Delay Differential Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 635–656.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-635-656

Abstract. We construct some asymptotic formulas for solutions of a certain linear second-order delay differential equation when the independent variable tends to infinity. Two features concerning the considered equation should be emphasized. First, the coefficient of this equation has an oscillatory decreasing form. Second, when the delay equals zero, this equation turns into the so-called one-dimensional Schrödinger equation at energy zero with Wigner–von Neumann type potential. Dynamics of the latter is well-known. The question of interest is how the behavior of solutions changes qualitatively and quantitatively when the delay is introduced in this dynamical model. This equation also attracts interest from the standpoint of the theory of oscillations of solutions of functional differential equations. We apply the method of asymptotic integration that is based on the ideas of the centre manifold theory in its presentation with respect to the systems of functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients. The essence of the method is to construct a so-called critical manifold in the phase space of the considered dynamical system. This manifold is attractive and positively invariant, and, therefore, the dynamics of all solutions of the initial equation is determined by the dynamics of the solutions lying on the critical manifold. The system that describes the dynamics of the solutions lying on the critical manifold is a linear system of two ordinary differential equations. To construct the asymptotics for solutions of this system, we use the averaging changes of variables and transformations that diagonalize variable matrices. We reduce the system on the critical manifold to what is called the L-diagonal form. The asymptotics of the fundamental matrix of L-diagonal system may be constructed by the use of the classical Levinson's theorem.

Keywords: asymptotics, delay differential equation, Shrödinger equation, oscillating coefficients, oscillations of solutions, Levinson's theorem, method of averaging

On the authors:
Pavel N. Nesterov, orcid.org/0000-0002-9102-9436, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Acknowledgments:
This research was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-4625.2016.1.